



Тема: Логарифмічні нерівності

Мета:

- *Навчальна:* розглянути приклади логарифмічних нерівностей та найпростіших логарифмічних нерівностей, навчитися розв'язувати найпростіші та більш складні логарифмічні нерівності;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати логарифмічні нерівності різними способами;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

Компетенції:

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

Тип уроку: засвоєння нових знань;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

III. Вивчення нового матеріалу

$$\left. \begin{array}{l} \log_4 x > -3 \\ \log_5(2x - 3) = \log_5(x + 7) \\ \log_2(x^2 + 4x + 3) = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Логарифмічні нерівності містять змінну} \\ \text{тільки під знаком логарфима} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Найпростіші логарифмічні нерівності} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \log_a x > b, \log_a x < b, \\ \log_a x \geq b, \log_a x \leq b \\ (a > 0, a \neq 1, b - \text{число}) \end{array} \right.$$



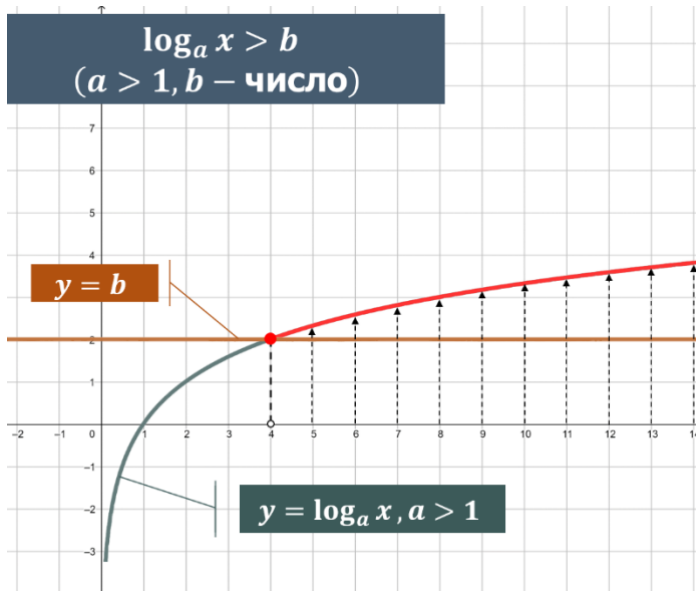
- Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей

➤ Розглянемо найпростішу логарифмічну нерівність:

$$\log_a x > b, a > 1, b - \text{число}$$

Нехай $b = \log_a a^b \Rightarrow \log_a x > \log_a a^b$.

Виконаємо побудову графіків:



Більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, отже:

$$\log_a x > \log_a a^b \Rightarrow x > a^b$$

Знак нерівності не змінюється

➤ Чи буде виконуватися умова ОДЗ нерівності?

$$\left. \begin{array}{l} a^b > 0 \\ \forall a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R} \\ x > a^b \end{array} \right| \Rightarrow x > 0 \quad \begin{array}{l} \text{Отже, умова ОДЗ} \\ \text{виконується} \end{array}$$

➤ Розв'яжіть цю логарифмічну нерівність:

$$\log_4 x > 2$$

$$\log_4 x > \log_4 4^2 \quad (\text{Так як } 2 = \log_4 4^2)$$

$$x > 4^2 \quad (\text{Так як нерівність } \log_4 x > \log_4 4^2 \text{ рівносильна нерівності } x > 4^2)$$

$$x > 16$$

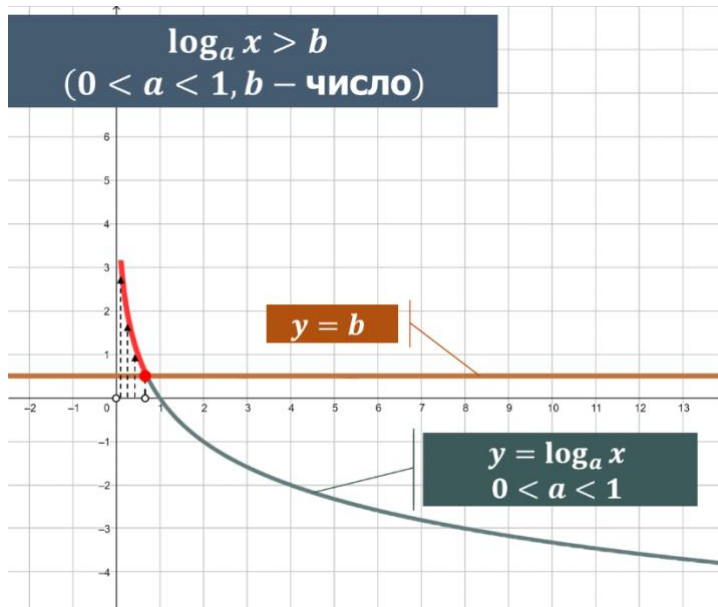
$$\text{Відповідь: } x \in (16; +\infty)$$



- Розглянемо найпростішу логарифмічну нерівність $\log_a x > b$ у випадку $0 < a < 1$, b – число.

Нехай $b = \log_a a^b \Rightarrow \log_a x > \log_a a^b$.

Виконаємо побудову графіків:



Більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, отже:

$$\log_a x > \log_a a^b \Rightarrow x < a^b$$

Знак нерівності змінюється на протилежний

- Чи буде виконуватися умова ОДЗ нерівності?

$x < a^b$
ОДЗ: $x > 0$ $\Rightarrow 0 < x < a^b$ *Отже, якщо в отриманій нерівності немає гарантії, що $x > 0$ необхідно враховувати ОДЗ*

- Розв'яжіть цю логарифмічну нерівність:

$$\log_{0,4} x \geq 2$$

$$\log_{0,4} x \geq \log_{0,4} 0,16 \text{ (Так як } 2 = \log_{0,4} 0,16)$$

Отримана нерівність рівносильна системі
$$\begin{cases} x \leq 0,16 \\ x > 0 \end{cases}$$

Відповідь: $x \in (0; 0,16]$



- Розв'язування нерівностей виду $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \end{cases}$

Теорема

Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$



$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $a > 1$	$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $0 < a < 1$	$\Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$

2) $\log_8(2x - 3) > \log_8 7$

3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$

Розв'язок:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$
 $x > 9$

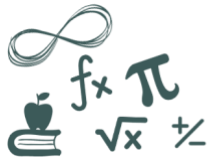
Відповідь: $x \in (9; +\infty)$

2) $\log_8(2x - 3) > \log_8 7$
 $\begin{cases} 2x - 3 > 7 \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x > 10 \\ 2x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x > 5$

Відповідь: $x \in (5; +\infty)$

3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$
 $\begin{cases} x < 14 \\ x > 0 \end{cases}$

Відповідь: $x \in (0; 14)$



Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7 x > 2$

2) $\log_{0,6}(x - 2) < 2$

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 5$

Розв'язок:

1) $\log_7 x > 2$

$$\log_7 x > \log_7 49$$

$$x > 49$$

Відповідь: $x \in (49; +\infty)$

2) $\log_{0,6}(x - 2) < 2$

$$\log_{0,6}(x - 2) < \log_{0,6} 0,36$$

$$\begin{cases} x - 2 > 0,36 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2,36 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2,36$$

Відповідь: $x \in (2,36; +\infty)$

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 5$

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$$

$$x \geq \frac{1}{32}$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{1}{32}; +\infty\right)$

№3

Скільки цілих розв'язків має нерівність:

$$\log_{0,25}(3x - 5) > -3$$

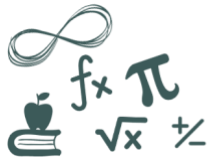
Розв'язок:

$$\log_{0,25}(3x - 5) > -3$$

$$\log_{0,25}(3x - 5) > \log_{0,25} 64$$

$$\begin{cases} 3x - 5 < 64 \\ 3x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x < 69 \\ 3x > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 23 \\ x > \frac{5}{3} \end{cases}$$

Відповідь: нерівність має 21 цілих розв'язків



Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg(2x + 3) > \lg(x - 1)$

2) $\log_{0,2}(2x - 1) > \log_{0,2}(3x - 4)$

Розв'язок:

1) $\lg(2x + 3) > \lg(x - 1)$

$$\begin{cases} 2x + 3 > x - 1 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$$

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$

2) $\log_{0,2}(2x - 1) > \log_{0,2}(3x - 4)$

$$\begin{cases} 2x - 1 < 3x - 4 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x > 3$$

Відповідь: $x \in (3; +\infty)$

№5

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8(x^2 - 4x + 3) \leq 1$

2) $\log_{0,5}(x^2 + x) > -1$

Розв'язок:

1) $\log_8(x^2 - 4x + 3) \leq 1$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 8 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 \leq 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 4x - 5 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

*Так як знак нерівності « \leq », оберемо проміжок $[-1; 5]$

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

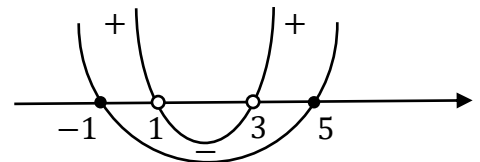
1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

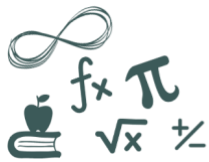
2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 4x + 3 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

*Так як знак нерівності « $>$ », оберемо проміжок $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

Відповідь: $[-1; 1) \cup (3; 5]$





2) $\log_{0,5}(x^2 + x) > -1$

$$\log_{0,5}(x^2 + x) > \log_{0,5} 2$$

$$\begin{cases} x^2 + x < 2 \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ x(x + 1) > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 2 < 0$$

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 + x - 2 = 0$

$$\text{За теоремою Вієта} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

*Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок $(-2; 1)$

$$x(x + 1) > 0$$

$$f(x) = x(x + 1)$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

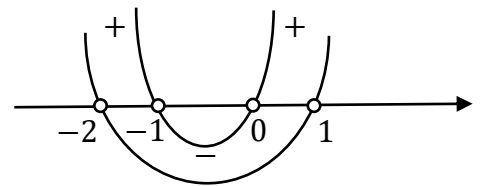
2. Нулі функції $f(x)$: $x(x + 1) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -1$$

*Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

Відповідь: $(-2; -1) \cup (0; 1)$



№6

Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x + \lg(x - 3) > 1$

2) $\log_2 x + \log_2(x + 4) < 5$

3) $\log_6(5x + 8) + \log_6(x + 1) \leq 1 - \log_6 3$

Розв'язок:

1) $\lg x + \lg(x - 3) > 1$

$$\lg(x(x - 3)) > \lg 10$$

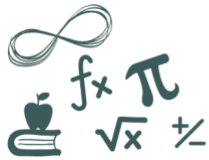
Використали теорему про логарифм добутку;
 $1 = \lg 10$

$$\begin{cases} x(x - 3) > 10 \\ x > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 10 > 0$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

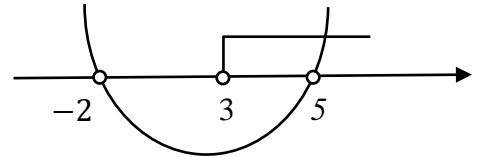
1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$



2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 - 3x - 10 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок
 $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$



Відповідь: $(5; +\infty)$

2) $\log_2 x + \log_2(x + 4) < 5$

$$\log_2(x(x + 4)) < \log_2 32$$

Використали теорему про логарифм
добутку;
 $1 = \lg 10$

$$\begin{cases} x(x + 4) < 32 \\ x > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 32 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x - 32 < 0$$

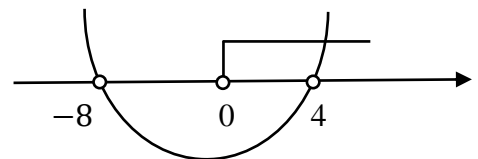
$$f(x) = x^2 + 4x - 32$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(x)$: $x^2 + 4x - 32 = 0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -8 \end{cases}$

Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок
 $(-8; 4)$



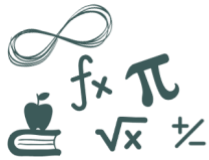
Відповідь: $(0; 4)$

3) $\log_6(5x + 8) + \log_6(x + 1) \leq 1 - \log_6 3$

$$\log_6(5x + 8) + \log_6(x + 1) \leq \log_6 6 - \log_6 3 \quad 1 = \log_6 6$$

$$\log_6(5x + 8)(x + 1) \leq \log_6 \frac{6}{3}$$

Використали теорему про
логарифм добутку та логарифм
частки



$$\begin{cases} (5x + 8)(x + 1) \leq 2 \\ 5x + 8 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

За теоремою про розв'язок
логарифмічних нерівностей виду
 $\log_a f(x) > \log_a g(x)$
 $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$

$$\begin{cases} 5x^2 + 5x + 8x + 8 - 2 \leq 0 \\ 5x > -8 \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 13x + 6 \leq 0 \\ x > -\frac{8}{5} \\ x > -1 \end{cases} \Rightarrow x > -1$$

$$5x^2 + 13x + 6 \leq 0$$

$$f(x) = 5x^2 + 13x + 6$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

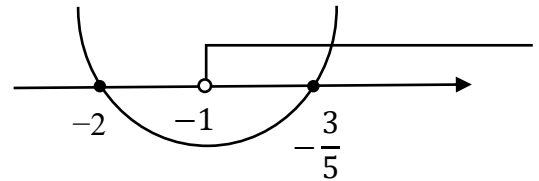
2. Нулі функції $f(x)$: $5x^2 + 13x + 6 = 0$

$$D = 169 - 120 = 49 = 7^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 7}{10} = \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Так як знак нерівності « \leq », оберемо
проміжок $[-3; -\frac{3}{5}]$

Відповідь: $(-1; -\frac{3}{5}]$



№7

Розв'яжіть нерівність:

1) $2 \log_{\frac{1}{9}} x - 5 \log_{\frac{1}{9}} x + 2 \geq 0$

$$2t^2 - 5t + 2 \geq 0$$

Виконали заміну: $\log_{\frac{1}{9}} x = t$

$$2t^2 - 5t + 2 \geq 0$$

$$f(t) = 2t^2 - 5t + 2$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$



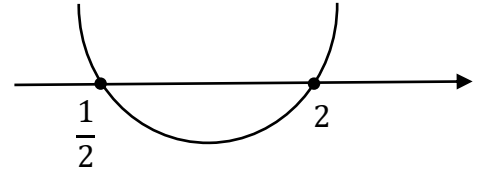
2. Нулі функції $f(x)$: $2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

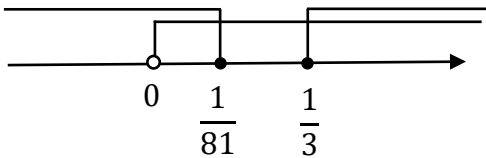
$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Так як знак нерівності « \geq », оберемо проміжок $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$

$$\text{Тобто } \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{9}} x \geq 2 \\ \log_{\frac{1}{9}} x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \left(\frac{1}{9}\right)^2 \\ x \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{81} \\ x \geq \frac{1}{3} \\ x > 0 \end{cases}$$



Відповідь: $(0; \frac{1}{81}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty)$

V. Підсумок уроку

- Які нерівності називають логарифмічними?
- Які нерівності називаються найпростішими логарифмічними нерівностями?
- Як розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність? Наведіть приклад.
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність типу $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $0 < a < 1$?

VI. Домашнє завдання

Опрацювати §1 (ст.36-37)

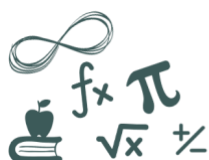
Виконати № 7.2 (1,4); 7.4 (1,4); 7.6 (6); 7.8 (1); 7.10 (1,2); 7.12 (1,3); 7.14 (4)

Мерзляк А.Г.

Опрацювати §7

Виконати № 7.2 (1,2); 7.6 (1,2); 7.10 (1); 7.14 (1); 7.24; 7.28

Істер О.С.



Математика НОВА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ, 11 КЛАС

Рівень стандарту



Опрацювати §5 (п.5.2)

Виконати № 5.2.1 (1,3); 5.2.3 (1,4); 5.2.5 (1,3);

Нелін Є.П.

Опрацювати §4

Виконати № 163 (а,в); №178 (а); 183 (а,г)

Бевз Г.П.